⊙ Le but de cette section est de résoudre un système d'eq. (S) i.e. déterminer l'ensemble W des solutions de (S).

⊙ Deux systèmes (S) et (S') sont équivalents $\Leftrightarrow$ ils ont le même ensemble de solution W.

⊙ On peut écrire le système sous forme de matrice :

$AX = B$ ou avec la matrice étendue $(A \mid B)$

Pro 3.34 Considérons (S) : $AX = B$. Si $M \in \mathbb{R}^{s \times s}$ est inversible, alors

$$MAX = MB$$

Co 3.35 Si on applique des transformation élémentaires de lignes à la matrice étendue d'un système d'équation linéaire, nous trouvons un système équivalent

CH 4 : ESPACES VECTORIELS

4.1 CORPS COMMUTATIFS

Def 4.1 Un corps commutatif ou un champ $\mathbb{K}$ est un ensemble, dont les éléments sont appelés nombres (ou scalaires), muni de deux opérations internes :

① Addition $+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}, (a,b) \mapsto a+b$

② Multiplication $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}, (a,b) \mapsto a \cdot b = ab$

et en possession de $0 \in \mathbb{K}$, appelé l'élément zéro, et $1 \in \mathbb{K}$, appelé l'unité, qui satisfont les propriété suivantes :

$\boxed{C1}$ addition associative : $\forall a,b,c \in \mathbb{K}, (a+b)+c = a+(b+c)$

$\boxed{C2}$ 0 neutre pour l'addition : $\forall a \in \mathbb{K}, a+0 = a = 0+a$

$\boxed{C3}$ $\exists$ inverse pour l'addition : $\forall a \in \mathbb{K}, \exists -a \in \mathbb{K} \mid a+(-a) = 0 = (-a)+a$

$\boxed{C4}$ + commutatif : $\forall a,b \in \mathbb{K}, a+b = b+a$

$\boxed{C5}$ $\cdot$ associative : $\forall a,b,c \in \mathbb{K}, a(bc) = (ab)c$

$\boxed{C6}$ 1 est le neutre de $\cdot$: $\forall a \in \mathbb{K}, 1a = a = a1$

$\boxed{C7}$ $\cdot$ distributive % + : $\forall a,b,c \in \mathbb{K}, a(b+c) = ab+ac$ et $(a+b)c = ac+bc$

$\boxed{C8}$ $\cdot$ commutative : $\forall a,b \in \mathbb{K}, ab = ba$

$\boxed{C9}$ $\exists$ inverse pour $\cdot$: $\forall a \in \mathbb{K}_0, \exists a^{-1} \in \mathbb{K} \mid aa^{-1} = 1 = a^{-1}a$

- Si $\mathbb{K}$ satisfait toutes les conditions sauf $\boxed{C8}$, on dit que $\mathbb{K}$ est un corps (non commutatif)
- Si $\mathbb{K}$ satisfait toutes les conditions $\boxed{C1} \to \boxed{C7}$ on dit que $\mathbb{K}$ est un anneau. Si $\mathbb{K}$ satisfait aussi $\boxed{C8}$, alors c'est un anneau commutatif

4.2 DEFINITION D'ESPACE VECTORIEL

Def 4.3 Un espace vectoriel $(V, +, \cdot)$ sur un corps $\mathbb{K}$ est un ensemble V muni d'une loi interne $+ : V \times V \to V$ appelé addition (somme) vectorielle et d'une opération $\cdot : V \times V \to V$ appelé la multiplication scalaire ($\lambda \cdot \vec{v} = \lambda \vec{v}$ où $\lambda \in \mathbb{K}$, $\vec{v} \in V$) et en possession d'un élément $\vec{0} \in V$ appelé vecteur zéro, qui satisfont les propriétés suivantes :

$\boxed{EV1}$ associativité $+$: $\forall \vec{v}, \vec{w}, \vec{u} \in V$, $\vec{v} + (\vec{w} + \vec{u}) = (\vec{v} + \vec{w}) + \vec{u}$

$\boxed{EV2}$ $\vec{0}$ neutre pour $+$: $\forall \vec{v} \in V$; $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v} = \vec{0} + \vec{v}$

$\boxed{EV3}$ $\exists$ inverse pour $+$: $\forall \vec{v} \in V, \exists -\vec{v} \in V \mid \vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0} = (-\vec{v}) + \vec{v}$

$\boxed{EV4}$ Commutativité de $+$: $\forall \vec{v}, \vec{w} \in V$, $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$

$\boxed{EV5}$ associativité mixte pour le produit scalaire : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

$\forall \vec{v} \in V$, $\lambda(\mu \vec{v}) = (\lambda \mu) \vec{v}$

$\boxed{EV6}$ distributivité de $\cdot$ scalaire par rapport à $+$ scalaire : $\forall \lambda \in \mathbb{K}$,

$\forall \vec{v} \in V$, $(\lambda + \mu) \vec{v} = \lambda \vec{v} + \mu \vec{v}$

$\boxed{EV7}$ distributivité de la $\cdot$ scalaire par rapport à l'$+$ vectorielle :

$\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall \vec{v}, \vec{w} \in V$, $\lambda(\vec{v} + \vec{w}) = \lambda \vec{v} + \lambda \vec{w}$

$\boxed{EV8}$ $1 \in \mathbb{K}$ est l'élément neutre pour $\cdot$ scalaire :

$\forall \vec{v} \in V$, $1 \vec{v} = \vec{v}$

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on parle d'un espace vectoriel réel
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on parle d'un espace vectoriel complexe

4.3 SOUS-ESPACES

Def 4.8 Un **sous-espace (vectoriel)** W d'un espace vectoriel V sur un corps $\mathbb{K}$ est un sous-ensemble W de V tq $(W, +, \cdot)$ avec l'addition et multiplication scalaire dans V est à nouveau un espace vectoriel

? $\rightarrow W \neq \{\emptyset\}$ et $\vec{0} \in W$

Def 4.10 Soit V un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ et $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_r} \in V$, le vecteur $\lambda_1 \vec{v_1} + \dots + \lambda_r \vec{v_r} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \vec{v_i}$ est une **combinaison linéaire** ou **combili** des vecteurs $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_r}$

Pro 4.12 Soit W un sous-ensemble d'un espace vectoriel V sur un corps $\mathbb{K}$. Alors ces prop. sont équivalentes :

1. W est un sous-espace vectoriel de V $\Leftrightarrow$
2. W est non vide et $\forall \vec{v}, \vec{w} \in W$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\vec{v} + \vec{w} \in W$ et $\lambda \vec{v} \in W$
3. W est non vide et $\forall \vec{v}, \vec{w} \in W$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, la combili $\lambda \vec{v} + \mu \vec{w} \in W$
4. W est non vide et $\forall \vec{v_1}, \dots, \vec{v_r} \in W$, $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$, $\lambda_1 \vec{v_1} + \dots + \lambda_r \vec{v_r} \in W$

DEMO

$\boxed{A}$ 1 $\Rightarrow$ 2 • Si W est un S.E.V. de V, alors $\vec{0} \in W$, donc $W \neq \{\emptyset\}$

• Comme W est un S.E.V de V, il a la même $\cdot$ et $+$ que V et donc $\vec{v} + \vec{w} \in W$ et $\lambda \vec{v} \in W$.

1 $\Leftarrow$ 2 Pour un S.E. W non vide, 2 $\Rightarrow$ que la $\cdot$ et la $+$ se restreignent à W. $\Rightarrow \exists \vec{w} \in W$ tq $0\vec{w} = \vec{0} \in W$. ?

Comme les éléments de $W \in V$, ils satisfont les conditions $\boxed{EV1} \rightarrow \boxed{EV8}$

2 $\Rightarrow$ 3 On sait que $\forall \vec{v}, \vec{w} \in W$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\lambda \vec{v} \in W$ et $\mu \vec{w} \in W$ par 2. De plus par 1, leur somme est dans W.

3 $\Rightarrow$ 4 Par itérance de 2 $\Rightarrow$ 3, $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \vec{v_i} \in W$

4 $\Rightarrow$ 2 : 2 est un cas particulier de 4 : prenons $n = 2$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, on a $\vec{v} + \vec{w} \in W$. Et prenons $n = 1$, $\lambda_1 = \lambda$ et $\vec{v_1} = \vec{v}$, alors $\lambda \vec{v} \in W$

• Exercice : $U \cap W \subset V$ est un sous espace

$U \cup W \subset V$ est un sous-espace $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} U \subseteq W \\ \text{ou} \\ W \subseteq U \end{cases}$

déf 4.14 Soit V un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ et $A \subseteq V$ un sous-ensemble de V. Le sous-espace vectoriel engendré par A (ou enveloppe linéaire de A) est le plus petit sous-espace W de V qui contient A. Il est noté $\langle A \rangle$ ou $\mathrm{Vect}(A)$

Pro 4.15 Supposons que $A \neq \emptyset$. Alors $\mathrm{Vect}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{v_i} \mid n \in \mathbb{N}_0, a_i \in \mathbb{K}, \vec{v_i} \in A \right\}$

Si $A = \emptyset$, $\mathrm{Vect}(A) = \{\vec{0}\}$

A Est-ce que $\mathrm{Vect}(A) = \{ \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{v_i} \mid n \in \mathbb{N}_0, a_i \in \mathbb{K}, \vec{v_i} \in A \}$ est un sous-espace de V ?

① C'est un sous-ensemble de V. Et une combili d'une combili est une combili $\Rightarrow$ $\mathrm{Vect}(A)$ sous-espace de V

B $\mathrm{Vect}(A)$ contient A ? oui : prenons $n=1$, $\lambda_1 = 1$, alors $\vec{v} \in A = \underbrace{1 . \vec{v}}_{\in \mathrm{Vect}(A)}$

C Le plus petit ? oui car $\mathrm{Vect}(A)$ est un S.E.V et contient les éléments de A $\Rightarrow$ contient toutes les combilis des éléments de A

D Si $A = \emptyset$, $\mathrm{Vect}(A)$ étant un sous-espace vectoriel, il doit contenir $\vec{0}$.

Comme $A = \emptyset$, $\mathrm{Vect}(A)$ ne contient rien d'autre $\Rightarrow$ $\mathrm{Vect}(A) = \{\vec{0}\}$

4.4 PRODUIT ET SOMME DIRECT

Déf 4.17 Soit V un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. Soient U et W deux sous-espaces de V. On dit que V est la somme directe de U et W $\Leftrightarrow$ ① $U \cap W = \{\vec{0}\}$ et ② $\mathrm{Vect}(U \cup W) = V$

On écrit $V = U \oplus W$

Pro. 4.16 V est la somme directe de U et W $\Leftrightarrow$ tout les éléments de V s'écrivent d'une manière unique comme une somme d'un élément dans U et un élément dans W :

$$V = U \oplus W \Leftrightarrow \forall \vec{v} \in V, \exists! \vec{u} \in U, \exists! \vec{\omega} \in W : \vec{v} = \vec{u} + \vec{\omega}$$

DEMO

① Comme $V = U \oplus W \Rightarrow \exists \vec{u} \in U, \vec{\omega} \in W$ tq $\vec{u} + \vec{\omega} = \vec{v}, \forall \vec{v} \in V$

② Supposons par l'absurde que $\exists \vec{u}, \vec{u}' \in U$ et $\vec{\omega}, \vec{\omega}' \in W$ tq

$$\vec{u} + \vec{\omega} = \vec{v} = \vec{u}' + \vec{\omega}' \Leftrightarrow \underbrace{\vec{u} - \vec{u}'}_{\in U} = \underbrace{\vec{\omega}' - \vec{\omega}}_{\in W}$$

Or, $U \cap W = \{\vec{0}\} \Rightarrow \vec{u} - \vec{u}' = \vec{0}$ et $\vec{\omega}' - \vec{\omega} = \vec{0}$

Alors, $\vec{u}' = \vec{u}$ et $\vec{\omega} = \vec{\omega}'$ et $\vec{u}$ et $\vec{\omega}$ sont unique

③ Supposons que $\exists!\, \vec{u} \in U, \exists!\, \vec{w} \in W$ tq $\vec{u} + \vec{w} = \vec{v}$ $\forall \vec{v} \in V$.

Alors $\vec{u} + \vec{w} \in U + W = \text{Vect}(U \cup W)$

④ Supposons $\vec{v} \in U \cap W$, alors $\vec{v} = \overset{\in U}{\vec{v}} + \overset{\in W}{\vec{0}}$ $\Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$

$= \overset{\in U}{\vec{0}} + \overset{\in W}{\vec{v}}$

Pro 4.20 Soient V et W deux espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$.

? Considérons l'ensemble $V \times W$, qui a comme élément $(\vec{v}, \vec{w})$,

avec $\vec{v} \in V$ et $\vec{w} \in W$, muni des opérations suivantes :

$$(\vec{v}, \vec{w}) + (\vec{v}', \vec{w}') = (\vec{v} + \vec{v}', \vec{w} + \vec{w}')$$

$$\lambda(\vec{v}, \vec{w}) = (\lambda\vec{v}, \lambda\vec{w}) \quad \forall \vec{v}, \vec{v}' \in V, \lambda \in \mathbb{K}, \vec{w}, \vec{w}' \in W$$

Alors $V \times W$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

DEMO ! Exercice ! Tips : le vecteur neutre ici est $(\vec{0}, \vec{0})$

⊙ L'espace vectoriel $V \times W$ est appelé produit direct de V et W

Th. 4.21 Considérons le produit direct $V \times W$ des espaces vectoriels V et W. Considérons $V' = \{(\vec{v}, \vec{0}) \mid \vec{v} \in V\} \subset V \times W$

$$W' = \{(\vec{0}, \vec{w}) \mid \vec{w} \in W\} \subset V \times W$$

Alors V' et W' sont des sous espaces vectoriels de $V \times W$

et $V \times W$ est la somme directe de V' et W' : $V \times W = V' \oplus W'$

DEMO ! Observons que tout élément $(\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{0}) + (\vec{0}, \vec{w}) \in V \times W$

de manière unique car $V' \cap W' = \{(\vec{0}, \vec{0})\}$

Pro 4.22 Soit V un espace vectoriel avec des sous espace $W_1, W_2, \dots, W_n$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

① $V = \text{Vect}(\bigcup_{i=1}^{n} W_i)$ et $W_i \cap W_j = \{\vec{0}\}$ $\forall i,j = 1, \dots, n$ avec $i \neq j$

② $\forall \vec{v} \in V, \exists!\, \vec{w}_i \in W_i$ (pour $i = 1, \dots, n$) tq $\vec{v} = \vec{w}_1 + \dots + \vec{w}_n$

Dans ce cas, on dit que V est la somme directe des espaces W_1, $W_2, \dots, W_n$ et $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_n$

pro 4.23 Soit V un espace vectoriel avec une famille sous-espace $(W_i)_{i \in I}$, où I est un ensemble d'indice. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

① $V = \text{Vect}(\bigcup_{i \in I} W_i)$ $W_i \cap W_j = \{\vec{0}\}$

② $\forall \vec{v} \in V, \exists!\, \vec{w}_i \in W_{i \in I}$: $\vec{w}_i \neq \vec{0}$ $\forall i \in I$ et $\vec{v} = \sum_{i \in I} \vec{w}_i$

$\Rightarrow$ V est la somme directe des espaces $(W_i)_{i \in I}$: $V = \bigoplus_{i \in I} W_i$

Pro 4.25 Soient $V_1, \dots, V_n$ des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Alors l'ensemble $V_1 \times \dots \times V_n = \{(\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n}) \mid \vec{v_i} \in V_i, i = 1, \dots, n\}$ muni des opérations $(\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n}) + (\vec{v_1}', \dots, \vec{v_n}') = (\vec{v_1} + \vec{v_1}', \dots, \vec{v_n} + \vec{v_n}')$

et $\lambda(\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n}) = (\lambda \vec{v_1}, \dots, \lambda \vec{v_n})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, appelé le produit direct des espaces $V_1, \dots, V_n$.

Pro 4.26 Soit $(V_i)_{i \in I}$ une famille des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, où I est un ensemble d'indices, alors l'ensemble $\prod_{i \in I} V_i = \{(\vec{v_i})_{i \in I} \mid \vec{v_i} \in V_i, \forall i \in I\}$

muni des opérations $(\vec{v_i})_{i \in I} + (\vec{v_i}')_{i \in I} = (\vec{v_i} + \vec{v_i}')_{i \in I}$ et

$\lambda(\vec{v_i})_{i \in I} = (\lambda \vec{v_i})_{i \in I}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, appelé le produit direct des espaces $(V_i)_{i \in I}$.

Le sous-ensemble $\coprod_{i \in I} V_i = \{(\vec{v_i})_{i \in I} \mid \vec{v_i} = \vec{0}$, sauf pour un nombre fini d'indice$\}$

est un sous espace de $\prod_{i \in I} V_i$ que nous appelons coproduit des espaces $(V_i)_{i \in I}$

4.5 GEOMETRIE AFFINE D'UN ESP. VECTORIEL

Def 4.27 Soit V un espace vectoriel. Une variété linéaire (non vide) L de V est un sous ensemble de vecteurs V de la forme

$$L = \vec{a} + W = \{\vec{a} + \vec{w} \mid \vec{w} \in W\}$$ où W est un sous espace vectoriel de V et $\vec{a}$ est un vecteur (fixé) de V. Par def., $\{\vec{0}\}$ est aussi une variété linéaire.

Le 4.29 Soient W un sous-espace d'un espace vectoriel V et $\vec{w} \in W$.

Alors $\vec{w} + W = W$

Pro 4.30 Soient V un espace vectoriel, $\vec{a}, \vec{a}' \in V$ et $W, W' \subset V$ des sous-espaces vectoriels. Alors les conditᵒ suivantes sont équivalentes:

① $\vec{a} + W = \vec{a}' + W'$

② $W = W'$ et $\vec{a} - \vec{a}' \in W$

DEMO ① ⇒ ②: Comme $\vec{a} = \vec{a} + \vec{0} \in \vec{a} + W = \vec{a}' + W'$, $\exists\, \vec{w}' \in W'$ tq $\vec{a} = \vec{a}' + \vec{w}'$. Alors, $\vec{a} - \vec{a}' = \vec{w}' \in W'$

De plus, $\forall\, \vec{w} \in W$, $\vec{a} + \vec{w} \in \vec{a} + W = \vec{a}' + W'$. Donc $\exists\, \vec{w}' \in W'$ tq $\vec{a} + \vec{w} = \vec{a}' + \vec{w}'$ et donc $\vec{w} = \underbrace{\vec{a}' - \vec{a}}_{\in W'} + \vec{w}' \in W'$

Alors $W \subseteq W'$ et $W' \subseteq W \Leftrightarrow W = W'$.

② ⇒ ①: On a $\vec{a} + W' = \vec{a}' + \underbrace{(\vec{a} - \vec{a}') + W}_{=W} = \vec{a}' + W = \vec{a}' + W'$

Co 4.31 Soit $L = \vec{a} + W$ une variété linéaire. Alors $L = \vec{a}' + W$ $\forall \vec{a}' \in L$

DEMO Soit $\vec{a}' \in L$, alors $\vec{a}' = \vec{a} + \vec{\omega}$ pour un certain $\vec{\omega} \in W$.

Alors $\vec{a}' + W \overset{4.29}{=} \vec{a} + \vec{\omega} + W = \vec{a} + W = L$

Pro 4.32 L'intersection d'une famille de variétés linéaires dans un espace vectoriel V est de nouveau une variété linéaire de V

Pour $L_i = \vec{a}_i + W_i$, $\bigcap_{i \in I} L_i$ est une var. linéaire.

DEMO ① Si $\bigcap_{i \in I} L_i = \emptyset$, alors $\bigcap_{i \in I} L_i$ est une variété linéaire par définition (4.27)

② Supposons $\exists \vec{b} \in \bigcap_{i \in I} L_i$. Alors (4.31) $L_i = \vec{b} + W_i$ $\forall i \in I$.

Alors $\vec{z} \in \bigcap_{i \in I} L_i \Leftrightarrow \exists \vec{\omega}_i \in W_i$ tq $\vec{z} = \vec{b} + \vec{\omega}_i$, $\forall i \in I$

- Fixons $i_0 \in I$. Alors $\forall i \neq i_0$, $\vec{z} = \vec{a} + \vec{\omega}_{i_0} = \vec{a} + \vec{\omega}_i$ et donc $\vec{\omega}_i = \vec{\omega}_{i_0}$. $\Rightarrow$ $\vec{\omega}_{i_0} \in \bigcap_{i \in I} W_i$ et donc $\vec{z} \in \vec{a} + \bigcap_{i \in I} W_i$
- On peut écrire $\bigcap_{i \in I} L_i = \vec{b} + \bigcap_{i \in I} W_i$ et donc $\bigcap_{i \in I} L_i$ est une variété linéaire car $\bigcap_{i \in I} W_i$ est un sous-espace vectoriel de V

Def 4.33 Soient $L = \vec{a} + W$ et $L' = \vec{a}' + W'$ deux variété linéaire.

On dit que L est parallèle à L' ($L \parallel L'$) $\Leftrightarrow$ $W \subseteq W'$ ou $W' \subseteq W$

CN5 BASES ET DIMENSION

5.1 PARTIES GENERATRICES ET PARTIES LIBRES

Def 5.1 Un sous-ensemble $A \subseteq V$ est une partie génératrice de V si tout vecteur de V est combili de vecteurs de A: $\mathrm{Vect}(A) = V$

Soit A une partie génératrice infinie de V, alors on peut écrire $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{a}_i$ avec $\lambda_i \in K$ et $\vec{a}_i \in A$. Mais si A est infini, on

? écrit $\vec{v} = \sum_{\vec{a} \in A} \lambda_{\vec{a}} \vec{a}$ où $\lambda_{\vec{a}} = 0$ pour tout a sauf un nombre fini de terme.